

Κεφάλαιο 14

Ασάφεια

Τεχνητή Νοημοσύνη - Β' Έκδοση

Ι. Βλαχάβας, Π. Κεφαλάς, Ν. Βασιλειάδης, Φ. Κόκκορας, Η. Σακελλαρίου

Ασάφεια (*Fuzziness*)

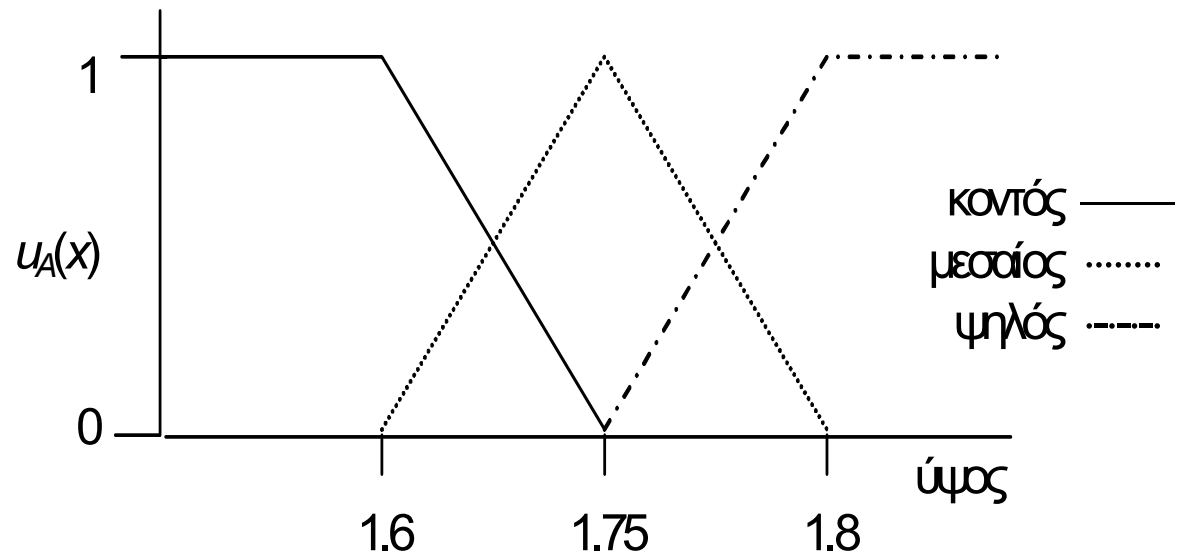
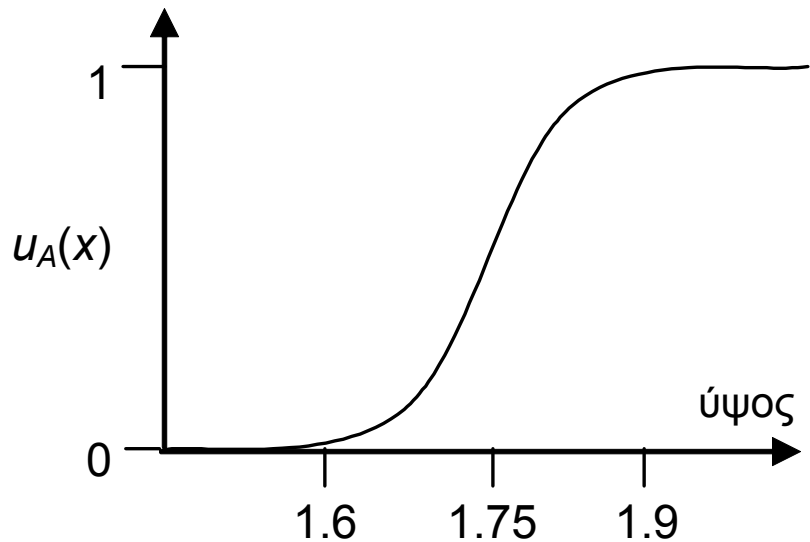
- ❖ Έννοια που σχετίζεται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας και οφείλεται κυρίως σε μη-ακριβή (*imprecise*) δεδομένα.
 - "Ο Νίκος είναι ψηλός"
- ❖ Το πρόβλημα οφείλεται στην αντίληψη που έχει ο καθένας για λεκτικούς προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών (*σημασιολογική ασάφεια*)
- ❖ Εγγενές χαρακτηριστικό της γλώσσας.
- ❖ *Ασαφής Λογική (fuzzy logic)*: υπερσύνολο της κλασικής λογικής
 - χειρίζεται τιμές αληθείας μεταξύ του "απολύτως αληθούς" και του "απολύτως ψευδούς".
- ❖ *Θεωρία Ασαφών Συνόλων (Fuzzy Set Theory)* - Lofti Zadeh '60

Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

- ❖ *Ασαφές Σύνολο (fuzzy set) A*: ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(x, u_A(x))$ όπου $x \in X$ και $u_A(x) \in [0, 1]$.
 - ❑ Το σύνολο X περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά.
 - ❑ $u_A(x)$: βαθμός αληθείας (*degree of truth*) - τιμές στο διάστημα $[0, 1]$.
 - ❑ Η συνάρτηση u_A ονομάζεται *συνάρτηση συγγένειας (membership function)*.

- ❖ Προέλευση u_A :
 - ❑ Υποκειμενικές εκτιμήσεις
 - ❑ Προκαθορισμένες (ad hoc) μορφές
 - ❑ Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
 - ❑ Φυσικές μετρήσεις
 - ❑ Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (νευρωνικά δίκτυα)

Αναπαράσταση Ασαφών Συνόλων



- ❖ Αναλυτική έκφρασης της u_A
- ❖ Απλούστευση: τμηματικώς γραμμικής απεικόνιση της u_A
- ❖ Σύνολο ζευγών της μορφής $u_A(x)/x$
 - ❑ Π.χ. ψηλός = $\{0/1.7, 0/1.75, 0.33/1.8, 0.66/1.85, 1/1.9, 1/1.95\}$
- ❖ Με ζεύγη της μορφής $(x, u_A(x))$:
 - ❑ Π.χ. ψηλός = $\{(1.7, 0), (1.75, 0), (1.8, 0.33), (1.85, 0.66), (1.9, 1), (1.95, 1)\}$

Ασαφείς Σχέσεις (1/2)

- ❖ Ασαφή σύνολα ορισμένα σε πεδία αναφοράς ανώτερης διάστασης.
 - **Παράδειγμα:** $R = "x \text{ είναι βαρύτερο από } y"$ $x \in X, y \in Y$ και $R \in X \times Y$
- ❖ Αναπαράσταση της R , σε μορφή πίνακα:

$$R = \begin{bmatrix} u_R(x_1, y_1) & u_R(x_1, y_2) & \cdots & u_R(x_1, y_n) \\ u_R(x_2, y_1) & u_R(x_2, y_2) & \cdots & u_R(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_R(x_m, y_1) & u_R(x_m, y_2) & \cdots & u_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

- ❖ **Σύνθεση (composition)** Ασαφών Σχέσεων: συνδυασμός ασαφών σχέσεων.
 - Πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση συγγένειας $u_R(x,z)$ της R , με χρήση των συναρτήσεων συγγένειας των R_1 και R_2 , δηλαδή των $u_{R_1}(x,y)$ και $u_{R_2}(y,z)$.

Ασαφείς Σχέσεις (2/2)

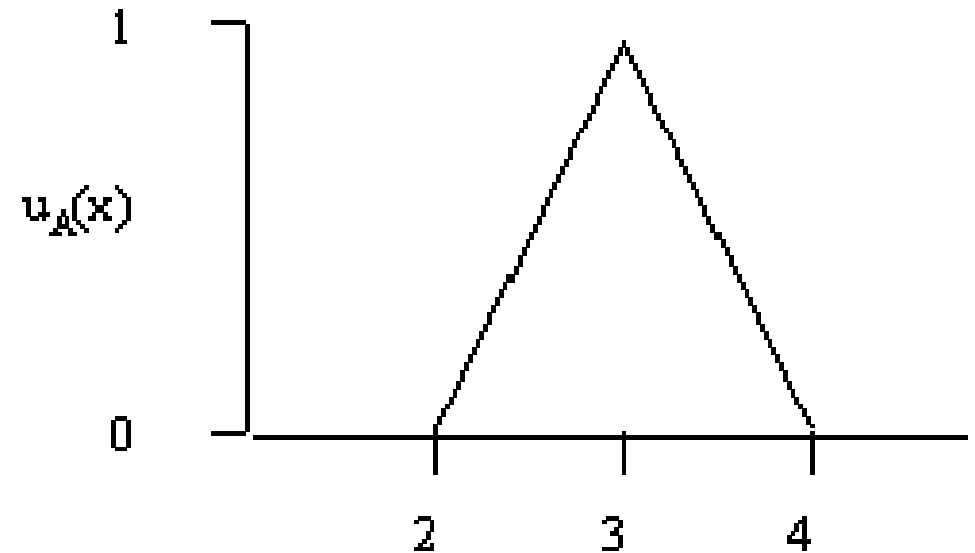
- ❖ Σύνθεση *max-min* (*max-min composition*)
- ❖ Σύνθεση *max-product* (*max-product composition*).
- ❖ Αν $R_1(x,y)$ και $R_2(y,z)$ είναι δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στα σύνολα $X \times Y$ και $Y \times Z$ αντίστοιχα, τότε η σύνθεσή τους δίνει μία νέα σχέση $R_1 \circ R_2$ ορισμένη στο $X \times Z$ με συνάρτηση συγγένειας:

❑ Σύνθεση *max-min*:
$$u_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y [u_{R_1}(x, y) \wedge u_{R_2}(x, y)]$$

❑ Σύνθεση *max-product*:
$$u_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y [u_{R_1}(x, y) \cdot u_{R_2}(x, y)]$$

Ασαφείς Μεταβλητές και Ασαφείς Αριθμοί

- ❖ **Ασαφής Μεταβλητή** (*fuzzy variable*): οι τιμές τις ορίζονται με ασαφή σύνολα.
 - ❑ Π.χ. τα ασαφή σύνολα {κοντός, μεσαίος, ψηλός} θα μπορούσαν να είναι το πεδίο τιμών της ασαφούς μεταβλητής "ύψος".
 - ❑ "ύψος": λεκτική (*linguistic*) μεταβλητή.
- ❖ **Ασαφείς αριθμοί** (*fuzzy numbers*): ασαφή υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Π.χ. "Ασαφές 3" στο σχήμα.
- ❖ μη ασαφείς τιμές: **crisp** (σαφείς, συγκεκριμένες).



Ασαφείς Προτάσεις και Ασαφείς Κανόνες

- ❖ **Ασαφής πρόταση** είναι αυτή που θέτει μια τιμή σε μια ασαφή μεταβλητή.
- ❖ **Ασαφής κανόνας** (*fuzzy rule*): είναι μία υπό συνθήκη έκφραση που συσχετίζει δύο ή περισσότερες ασαφείς προτάσεις.
 - ❑ "Εάν η ταχύτητα είναι μέτρια τότε η πίεση στα φρένα να είναι μέτρια"
- ❖ Η αναλυτική περιγραφή ενός ασαφούς κανόνα if-then είναι μία ασαφής σχέση $R(x,y)$ που ονομάζεται **σχέση συνεπαγωγής** (*implication relation*).

- ❖ Γενική της μορφή της σχέσης (συνάρτησης) συνεπαγωγής:
$$R(x,y) \equiv u(x,y) = \varphi(u_A(x), u_B(y))$$
 - ❑ φ : τελεστής συνεπαγωγής (*implication operator*)

Μερικοί Ασαφείς Τελεστές Συνεπαγωγής

Όνομασία Τελεστή	Αναλυτική Έκφραση του $\varphi[u_A(x), u_B(y)]$
φ_m : Zadeh Max-Min	$(u_A(x) \wedge u_B(y)) \vee (1 - u_A(x))$
φ_c : Mandani Min	$u_A(x) \wedge u_B(y)$
φ_p : Larsen Product	$u_A(x) \cdot u_B(y)$
φ_a : Arithmetic	$1 \wedge (1 - u_A(x) + u_B(y))$
φ_b : Boolean	$(1 - u_A(x)) \vee u_B(y)$

Συλλογιστικές Διαδικασίας GMP και GMT

- ❖ Γενική μορφή προβλημάτων κατά τη συλλογιστική με ασαφείς κανόνες:
 - ❑ if x is A then y is B
 - ❑ x is A' y is B' (?)
μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMP (Generalized Modus Ponens - GMP): $B' = A' \circ R(x, y)$
 - ❑ if x is A then y is B
 - ❑ x is A' (?) y is B'
μέσω της συλλογιστικής διαδικασίας GMT (Generalized Modus Tollens - GMT): $A' = R(x, y) \circ B'$
- ❖ Η σχέση συνεπαγωγής $R(x, y)$ που έχει επιλεγεί να χρησιμοποιηθεί, πρέπει να συνδυαστεί (σύνθεση) με την κατά περίπτωση γνωστή παράμετρο (A' ή B') ώστε να υπολογιστεί η άγνωστη παράμετρος.

Σύνοψη Ασαφούς Συλλογιστικής Διαδικασίας

- ❖ Με βάση έναν ασαφή κανόνα της μορφής:

"if x is A then y is B"

- ❖ και έστω συλλογιστική διαδικασία GMP (δηλαδή γνωστό το A' ως τιμή του x και ζητούμενο το B' ως τιμή του y), τα ασαφή σύνολα A και B συνδυάζονται με κάποιον από τους τελεστές συνεπαγωγής και παράγουν τη σχέση συνεπαγωγής $R(x,y)$.
- ❖ Από την $R(x,y)$ μέσω σύνθεσης (έστω *max-min* σύνθεση) με το A' προκύπτει η άγνωστη ποσότητα B' :

$$B' = A' \circ R(x,y)$$

Η Αρχή της Επέκτασης (1/2)

- ❖ Επέκταση των εννοιών και των υπολογιστικών τεχνικών των κλασσικών μαθηματικών στο πλαίσιο των ασαφών.
- ❖ συνάρτηση f : ορίζει απεικόνιση του $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ στο $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, έτσι ώστε $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$.
- ❖ ασαφές σύνολο A ορισμένο στα στοιχεία του X

$$A = \{ u_A(x_1)/x_1, u_A(x_2)/x_2, \dots, u_A(x_n)/x_n \}$$

- ❖ Αν η είσοδος x της συνάρτησης f γίνει ασαφής μέσω του συνόλου A , τότε τι συμβαίνει με την έξοδο y ;

- ❖ **Αρχή Επέκτασης:** υπολογισμός ασαφούς συνόλου B με εφαρμογή της f στο A .

$$B = f(A) = \{ u_A(x_1)/f(x_1), u_A(x_2)/f(x_2), \dots, u_A(x_n)/f(x_n) \}$$

- ❑ δηλαδή, κάθε $y_i = f(x_i)$ γίνεται ασαφές σε βαθμό $u_A(x_i)$
- ❑ πρακτικά, η $u_B(y)$ προκύπτει από την $u_A(x)$ όπου το x αντικαθίσταται με την έκφραση που προκύπτει για αυτό από την επίλυση της f ως προς x

Η Αρχή της Επέκτασης (2/2)

❖ Ειδικές Περιπτώσεις

- ❑ αν περισσότερα του ενός διαφορετικά x (έστω τα x_m και x_n) δίνουν μέσω της συνάρτησης f το ίδιο y (έστω το y_0), τότε: $u_B(y_0) = u_A(x_m) \vee u_A(x_n)$.
 - η μέγιστη τιμή συγγένειας των x_m και x_n στο A επιλέγεται ως βαθμός συγγένειας του y_0 στο B
- ❑ αν για κάποιο y_0 του B δεν υπάρχει x_0 του A τέτοιο ώστε $y_0 = f(x_0)$, τότε η τιμή συγγένειας του B στο y_0 είναι μηδέν.

❖ Γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις:

- ❑ αν υπάρχουν οι μεταβλητές u, v, \dots, w ορισμένες στα σύνολα U, V, \dots, W αντίστοιχα
- ❑ m διαφορετικά ασαφή σύνολα A_1, A_2, \dots, A_m ορισμένα στο $U \times V \times \dots \times W$
- ❑ η πολυπαραμετρική συνάρτηση $y = f(u, v, \dots, w)$

τότε η ασαφοποίηση του χώρου των y , δηλαδή η συνάρτηση συγγένειας του συνόλου B , ορίζεται ως εξής:

$$u_B(y) = \vee_{U \times V \times \dots \times W} [u_{A_1}(u) \wedge u_{A_2}(v) \wedge \dots \wedge u_{A_m}(w)] / f(u, v, \dots, w)$$

Παράδειγμα Χρήσης Αρχής Επέκτασης (1/2)

❖ Πρόσθεση των αριθμών A:"ασαφές 3" και B:"ασαφές 7"

□ A: "ασαφές 3" = { 0/1, 0.5/2, 1/3, 0.5/4, 0/5 }

□ B: "ασαφές 7" = { 0/5, 0.5/6, 1/7, 0.5/8, 0/9 }

❖ Κατασκευάζεται ο πίνακας:

		A		
		x=2	x=3	x=4
B	y=6	0.5	1	0.5
	y=7	1	1	1
	y=8	0.5	0.5	0.5

❖ Σύμφωνα με την αρχή της επέκτασης θα είναι:

$$u_{C=A+B}(z) = \bigvee_{z=x+y} [u_A(x) \wedge u_B(y)] / (x+y)$$

Παράδειγμα Χρήσης Αρχής Επέκτασης (2/2)

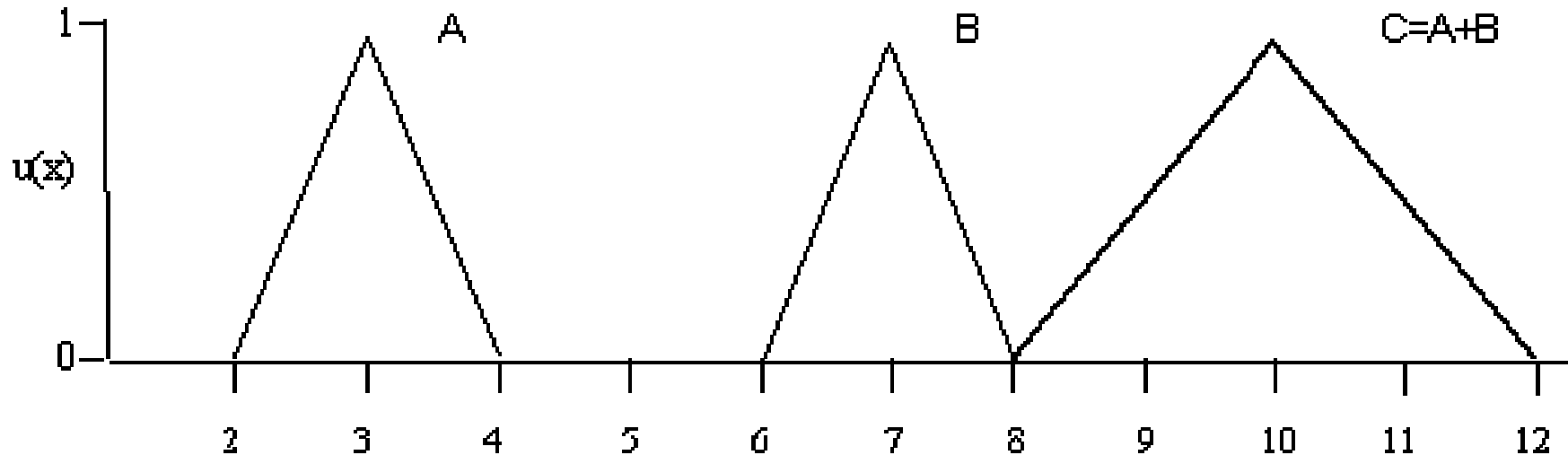
- ❖ Έστω $z=9$. Υπάρχουν δύο συνδυασμοί x και y που μας δίνουν άθροισμα 9.
- ❖ αρχή της επέκτασης:

$$\begin{aligned}u_{A+B}(9) &= \max(\min(u_A(3), u_B(6)), \min(u_A(2), u_B(7))) = \\ &= \max(\min(1, 0.5), \min(0.5, 1)) = \\ &= \max(0.5, 0.5) = 0.5\end{aligned}$$

□ Άρα: ο βαθμός συγγένειας του $z=9$ στο ασαφές σύνολο $C=A+B$ είναι 0.5.

- ❖ όμοια για τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα, οπότε προκύπτει:

$$u_{A+B}(z) = \{ 0/8, 0.5/9, 1/10, 0.5/11, 0/12 \}$$



Παράδειγμα Άμεσης Εφαρμογής Αρχής Επέκτασης

❖ Έστω η $y=f(x)$:

$$y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

❖ Έστω ότι το x γίνεται ασαφές μέσω της:

$$u_A(x) = 1/2 \cdot x$$

❖ Η έξοδος y της f γίνεται ασαφής με το $u_B(y)$ να προκύπτει με επίλυση της f ως προς x :

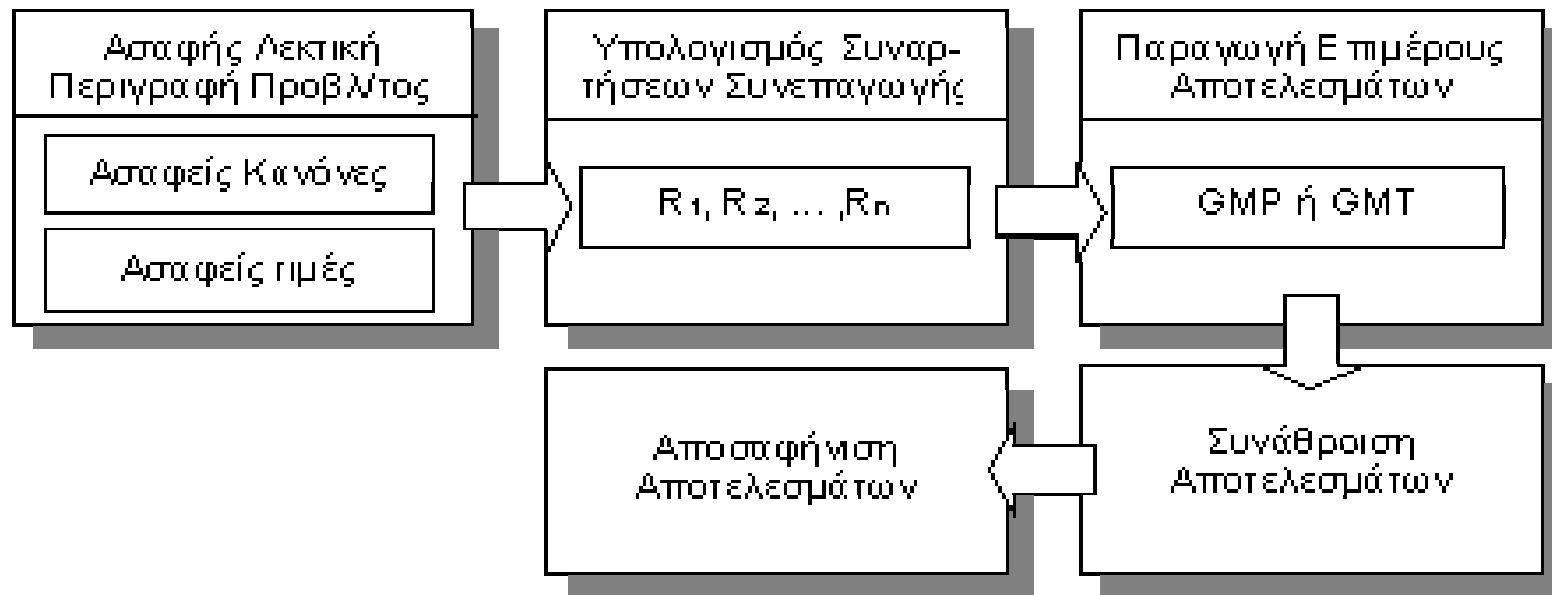
$$x = 2\sqrt{1 - y^2}$$

και αντικατάσταση στην $u_A(x)$:

$$u_B(y) = u_A(2\sqrt{1 - y^2}) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - y^2}$$

Ασαφής Συλλογιστική

- ❖ Εξαγωγή συμπερασμάτων με χρήση ασαφών κανόνων.
- ❖ **Τέσσερα στάδια:**
 - ❑ Υπολογισμός της συνάρτησης συνεπαγωγής για κάθε εμπλεκόμενο κανόνα.
 - ❑ Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων μέσω κάποιας συλλογιστικής διαδικασίας.
 - ❑ Συνάθροιση των επιμέρους αποτελεσμάτων.
 - ❑ Αποσαφήνιση αποτελεσμάτων.



Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής (1/2)

- ❖ Έστω σύστημα που ρυθμίζει τη δόση D μιας φαρμακευτικής ουσίας που πρέπει να χορηγηθεί σε ασθενή, με βάση τη θερμοκρασία του T .
- ❖ Έστω ότι το σύστημα βασίζεται στους εξής δύο ασαφείς κανόνες:

K_1 : if T is HIGH then D is HIGH

K_2 : if T is LOW then D is LOW

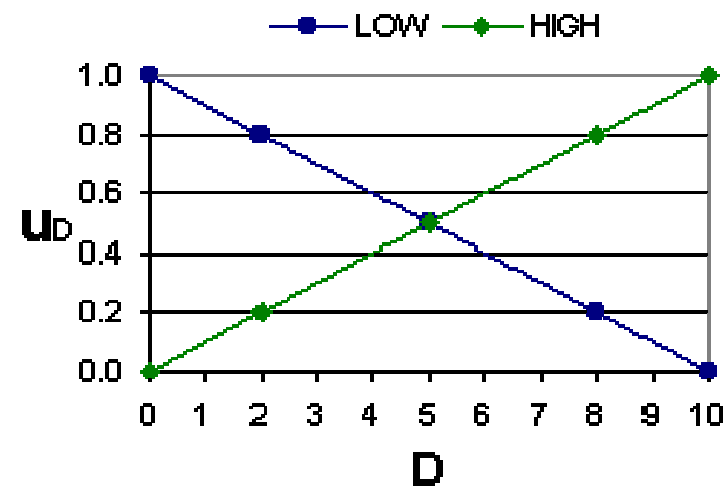
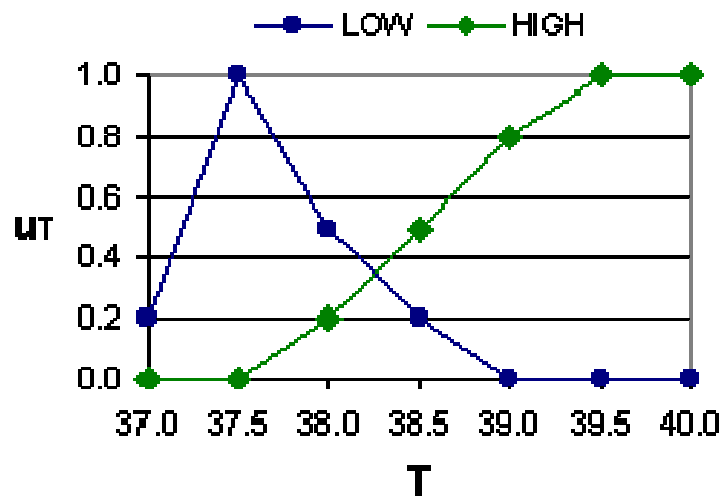
- ❖ Δίνονται επίσης τα ασαφή σύνολα HIGH και LOW για τα μεγέθη T και D :

$$T_{\text{LOW}} = \{ 0.2/37, 1/37.5, 0.5/38, 0.2/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 \}$$

$$T_{\text{HIGH}} = \{ 0/37, 0/37.5, 0.2/38, 0.5/38.5, 0.8/39, 1/39.5, 1/40 \}$$

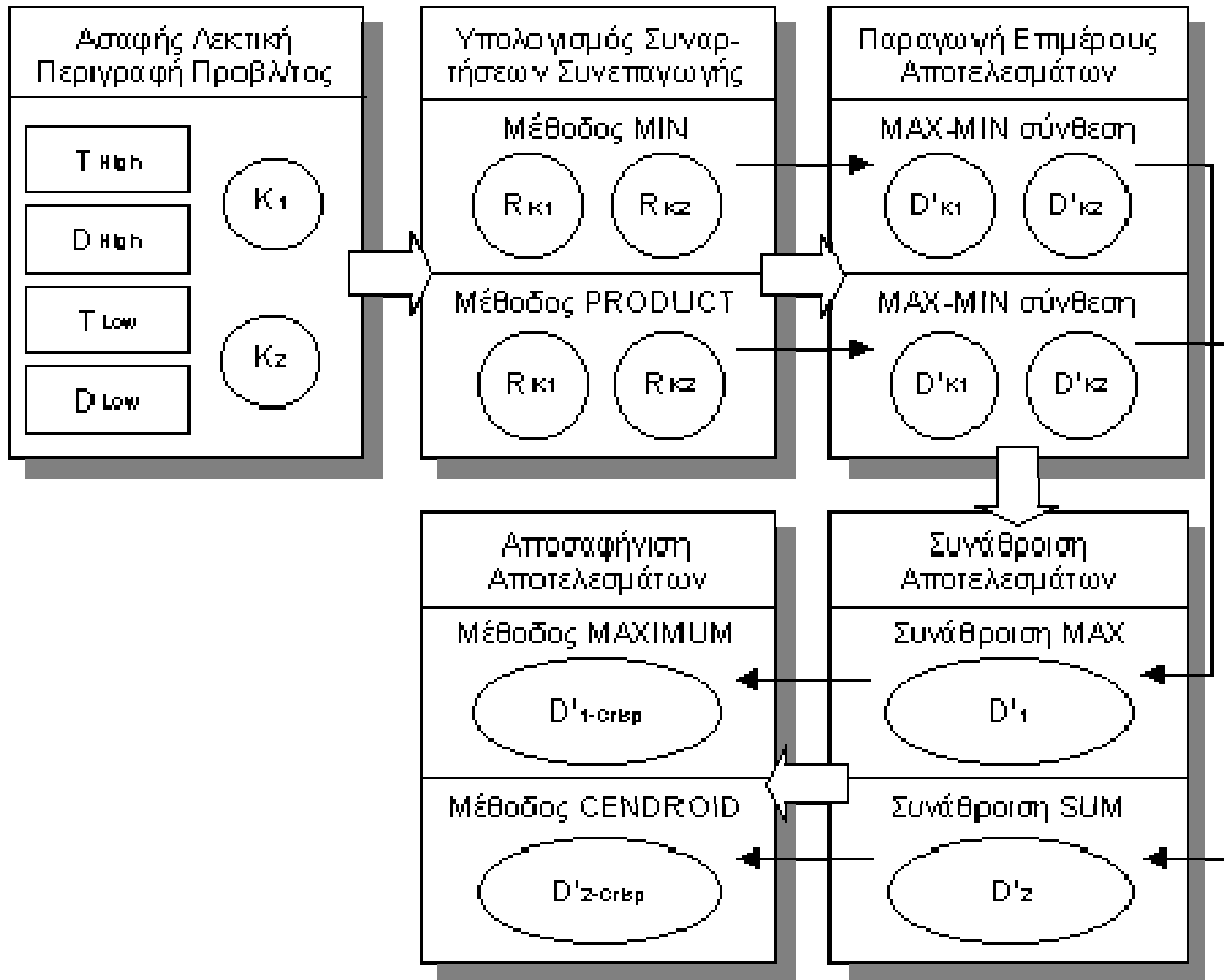
$$D_{\text{LOW}} = \{ 1/0, 0.8/2, 0.5/5, 0.2/8, 0/10 \}$$

$$D_{\text{HIGH}} = \{ 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.8/8, 1/10 \}$$



- ❖ Αν $T'=38.5$, να υπολογιστεί η τιμή του D' με συλλογιστική διαδικασία GMP.

Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής (2/2)



Βήμα A1: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής

Μέθοδος MIN

❖ 2 κανόνες: δύο τελεστές συνεπαγωγής, οι R_{K1} και R_{K2} .

□ Χρησιμοποιείται ο τελεστής συνεπαγωγής Mandani min (ή απλά MIN).

K_1 : if T is HIGH then D is HIGH

K_2 : if T is LOW then D is LOW

❖ Έστω ο K_1 . Κατασκευάζεται ο πίνακας αριστερά:

R_{K1}	D	0	2	5	8	10
T		0	0.2	0.5	0.8	1
37.0	0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0	0
38.0	0.2	0	0.2	0.2	0.2	0.2
38.5	0.5	0	0.2	0.5	0.5	0.5
39.0	0.8	0	0.2	0.5	0.8	0.8
39.5	1	0	0.2	0.5	0.8	1
40.0	1	0	0.2	0.5	0.8	1

R_{K2}	D	0	2	5	8	10
T		1	0.8	0.5	0.2	0
37.0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0
37.5	1	1	0.8	0.5	0.2	0
38.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2	0
38.5	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0
39.0	0	0	0	0	0	0
39.5	0	0	0	0	0	0
40.0	0	0	0	0	0	0

□ Κάθε κελί του εσωτερικού πίνακα περιέχει το $\min(u_{T_{HIGH}}, u_{D_{HIGH}})$ για τα T και D της γραμμής και στήλης στην οποία βρίσκεται.

□ Όμοια προκύπτει και η $R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$ για τον κανόνα K_2 (πίνακας δεξιά)

❖ **Γενίκευση:** αν N εκφράσεις στο if τμήμα τότε προκύπτει πίνακας N+1 διαστάσεων.

Βήμα A2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων (1/2)

- ❖ Με εφαρμογή της συλλογιστικής διαδικασίας GMP:
 - ❑ Κανόνας K_1 : $D'_{K1} = T' \circ R_{K1}(T_{HIGH}, D_{HIGH})$
 - ❑ Κανόνας K_2 : $D'_{K2} = T' \circ R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$
- ❖ Απαιτείται η γραφή της θερμοκρασίας $T' = 38.5$ σε μορφή ασαφούς συνόλου, δηλαδή:

$$T' = 38.5 = \{ 0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 \}$$
- ❖ Χρησιμοποιείται η μέθοδος σύνθεσης (\circ) max-min (η συνηθέστερη περίπτωση).
- ❖ Τεχνική όμοια με πολλαπλασιασμό πινάκων: χρησιμοποιείται min αντί πολλαπλασιασμού και max αντί πρόσθεσης.
- ❖ $1^{ος}$ πίνακας το ασαφές σύνολο T' (1×7) και $2^{ος}$ ο αριστερά του βήματος A1 (7×5)
- ❖ Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1×5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1} .

$T \backslash D$	0	2	5	8	10
37	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0
38	0	0.2	0.2	0.2	0.2
38.5	0	0.2	0.5	0.5	0.5
39	0	0.2	0.5	0.8	0.8
39.5	0	0.2	0.5	0.8	1
40	0	0.2	0.5	0.8	1

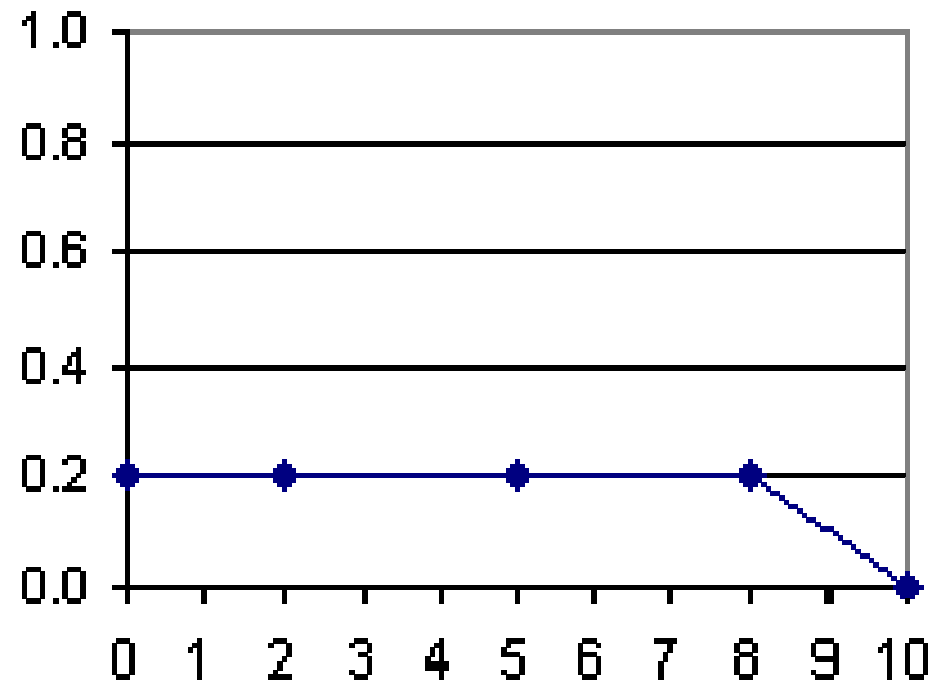
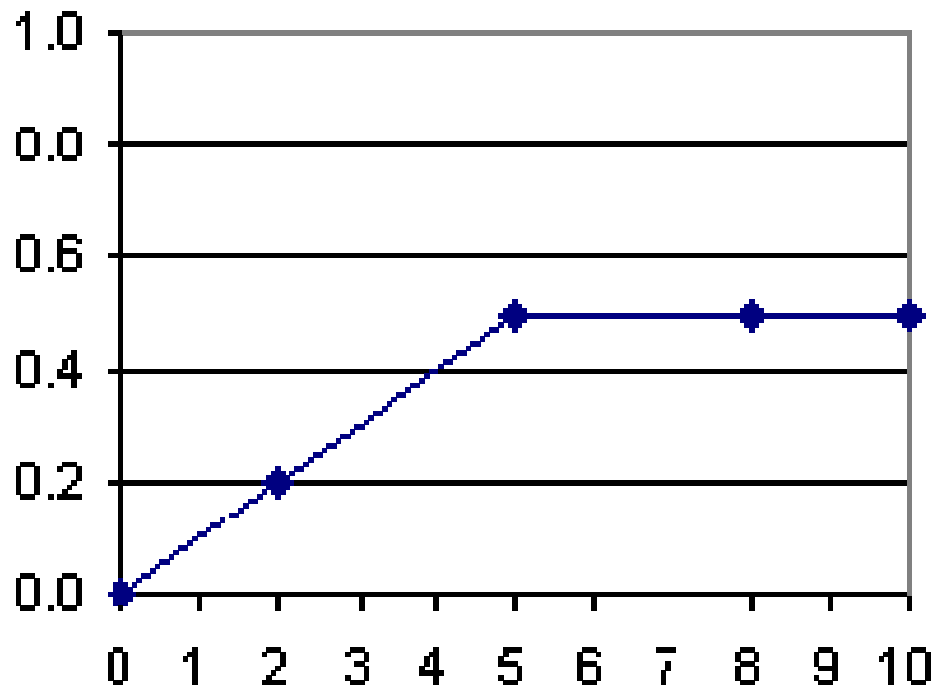
$$D'_{K1} = [0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40] \circ \Rightarrow$$

$$D'_{K1} = \{ 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 \}$$



Βήμα Α2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων (2/2)

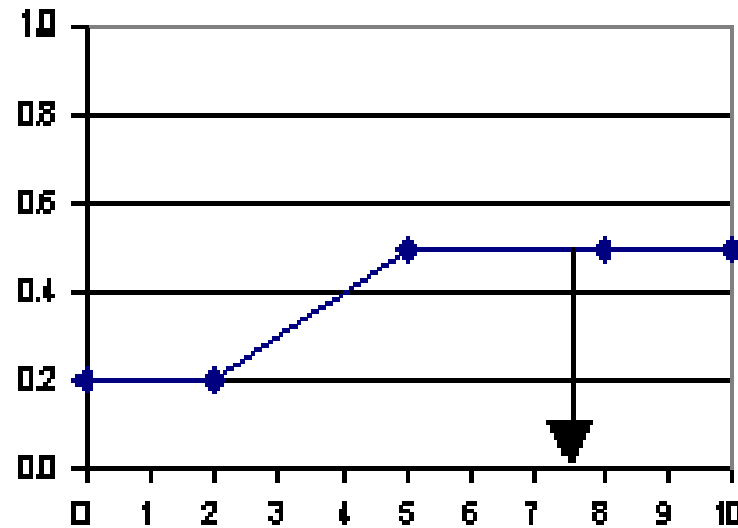
- ❖ Όμοια, ο κανόνας K_2 δίνει: $D'_{K_2} = \{ 0.2/0, 0.2/2, 0.2/5, 0.2/8, 0/10 \}$
- ❖ D'_{K_1} (αριστερά) και D'_{K_2} (δεξιά).



Βήμα A3: Συνάθροιση αποτελεσμάτων

Μέθοδος MAX

- ❖ Υπολογίζει τη συνδυασμένη έξοδο των κανόνων παίρνοντας τη μέγιστη τιμή συγγένειας από τις παραμέτρους εξόδου κάθε κανόνα, σημείο προς σημείο (*pointwise maximum* - $\max_{p/w}$).



- ❖ Δεδομένου ότι έχει υπολογιστεί:

$$D_{1'K1} = \{ 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 \}$$

$$D_{1'K2} = \{ 0.2/0, 0.2/2, 0.2/5, 0.2/8, 0/10 \}$$

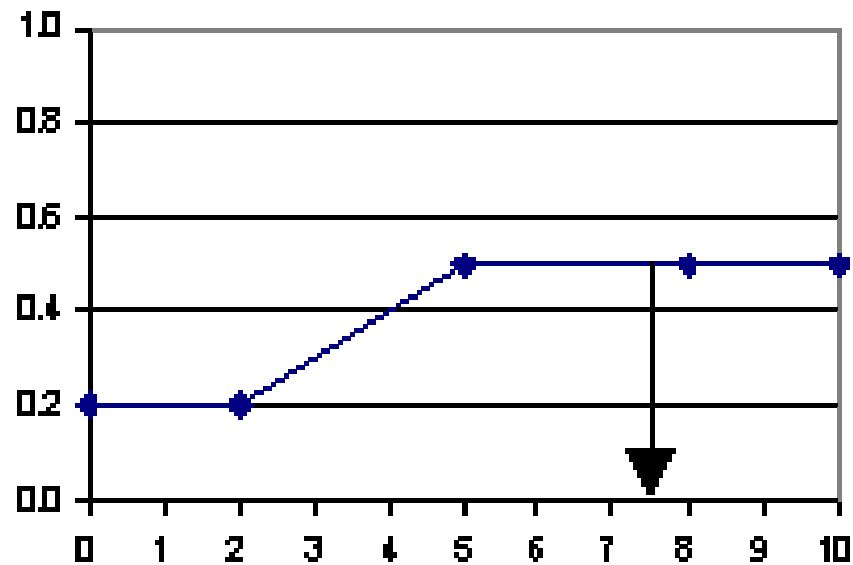
η συνάθροισή τους κατά *MAX* δίνει

$$\begin{aligned} D_{1'} &= \{ \max(0,0.2)/0, \max(0.2,0.2)/2, \max(0.5,0.2)/5, \max(0.5,0.2)/8, \max(0.5,0)/10 \} = \\ &= \{ 0.2/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 \} \end{aligned}$$

Βήμα A4: Αποσαφήνιση

❖ Μέθοδος αποσαφήνισης MAXIMUM

- ❑ διακριτή τιμή: μέγιστη τιμή συγγένειας του τελικού αποτελέσματος.
- ❑ με average-of-maxima αποσαφήνιση: $D_1 = (5+8+10)/3 = 7.7$



Βήμα Β1: Υπολογισμός συνάρτησης συνεπαγωγής

Μέθοδος PRODUCT

- ❖ δύο κανόνες: δύο τελεστές συνεπαγωγής, οι R_{K_1} και R_{K_2} .

Έστω ο τελεστής συνεπαγωγής Larsen Product (ή απλά PRODUCT).

K_1 : if T is HIGH then D is HIGH

K_2 : if T is LOW then D is LOW

- ❖ **Κανόνας K_1** . Κατασκευάζεται ο πίνακας αριστερά:

R_{K_1}	D	0	2	5	8	10
T		0	0.2	0.5	0.8	1
37	0	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0	0
38	0.2	0	0.04	0.1	0.16	0.2
38.5	0.5	0	0.1	0.25	0.4	0.5
39	0.8	0	0.16	0.4	0.64	0.8
39.5	1	0	0.2	0.5	0.8	1
40	1	0	0.2	0.5	0.8	1

R_{K_2}	D	0	2	5	8	10
T		1	0.8	0.5	0.2	0
37	0.2	0.2	0.16	0.1	0.04	0
37.5	1	1	0.8	0.5	0.2	0
38	0.5	0.5	0.4	0.25	0.1	0
38.5	0.2	0.2	0.16	0.1	0.04	0
39	0	0	0	0	0	0
39.5	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0

- ❑ Κάθε κελί του εσωτερικού πίνακα (σχέση συνεπαγωγής R_{K_1}) περιέχει το $(u_{T_{HIGH}} \cdot u_{D_{HIGH}})$ για τα T και D της γραμμής και στήλης στην οποία βρίσκεται.
- ❑ Όμοια προκύπτει και η $R_{K_2}(T_{LOW}, D_{LOW})$ για τον κανόνα K_2 (πίνακας δεξιά)

Βήμα B2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων (1/2)

- ❖ Με εφαρμογή της συλλογιστικής διαδικασίας GMP:
 - ❑ Κανόνας K_1 : $D'_{K1} = T' \circ R_{K1}(T_{HIGH}, D_{HIGH})$
 - ❑ Κανόνας K_2 : $D'_{K2} = T' \circ R_{K2}(T_{LOW}, D_{LOW})$
- ❖ Απαιτείται η γραφή της θερμοκρασίας $T' = 38.5$ σε μορφή ασαφούς συνόλου:

$$T' = 38.5 = \{ 0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 \}$$
- ❖ Χρησιμοποιείται η μέθοδος σύνθεσης (\circ) max-min (η συνηθέστερη περίπτωση).
- ❖ $1^{ος}$ πίνακας το ασαφές σύνολο T' (1×7) και $2^{ος}$ ο εσωτερικός του βήματος B1 (7×5)
- ❖ Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας 1×5 που θα αποτελεί και την ποσότητα D'_{K1} .

$$D'_{K1} = [0/37, 0/37.5, 0/38, 1/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40]$$

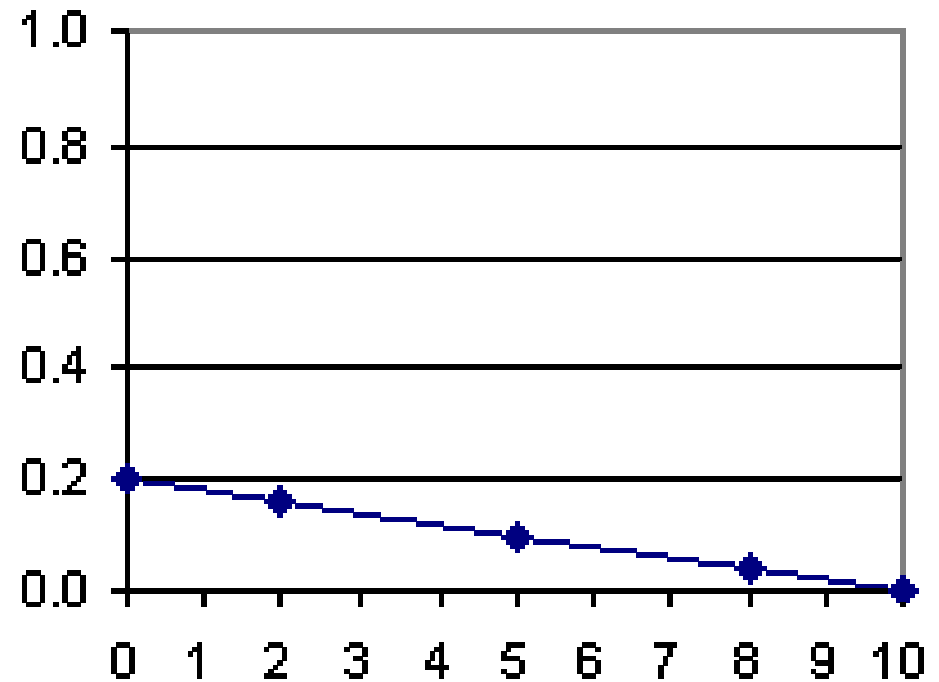
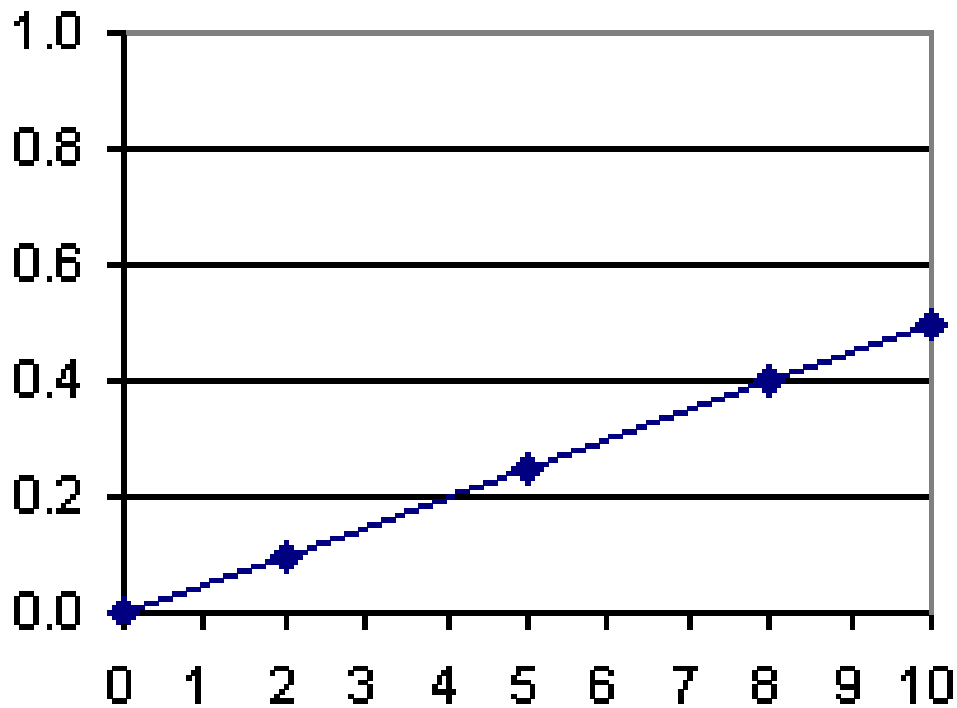
T \ D	0	2	5	8	10
37	0	0	0	0	0
37.5	0	0	0	0	0
38	0	0.04	0.1	0.16	0.2
38.5	0	0.1	0.25	0.4	0.5
39	0	0.16	0.4	0.64	0.8
39.5	0	0.2	0.5	0.8	1
40	0	0.2	0.5	0.8	1

\Rightarrow

$$D'_{K1} = \{ 0/0, 0.1/2, 0.25/5, 0.4/8, 0.5/10 \}$$

Βήμα Β2: Παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων (2/2)

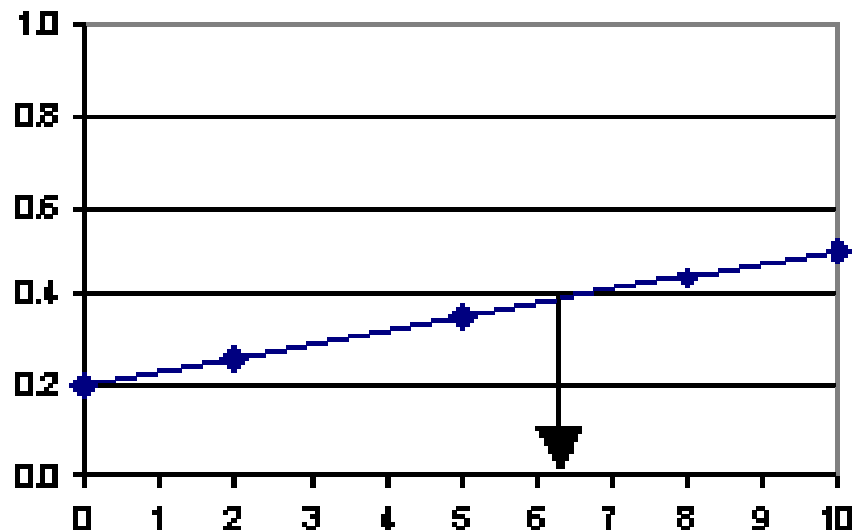
- ❖ Όμοια προκύπτει ότι ο κανόνας K_2 δίνει: $D'_{K_2} = \{ 0.2/0, 0.16/2, 0.1/5, 0.04/8, 0/10 \}$
- ❖ Γραφική απεικόνιση των D'_{K_1} (αριστερά) και D'_{K_2} (δεξιά).



Βήμα Β3: Συνάθροιση αποτελεσμάτων

Μέθοδος SUM

- ❖ Υπολογίζει τη συνδυασμένη έξοδο των κανόνων παίρνοντας το άθροισμα των τιμών συγγένειας των παραμέτρων εξόδου κάθε κανόνα, σημείο προς σημείο (*pointwise sum* - $\text{sum}_{p/w}$).
- ❖ Δεδομένου ότι έχει υπολογιστεί:
 - ❑ $D_{2'K1} = \{ 0/0, 0.1/2, 0.25/5, 0.4/8, 0.5/10 \}$
 - ❑ $D_{2'K2} = \{ 0.2/0, 0.16/2, 0.1/5, 0.04/8, 0/10 \}$
- ❖ ...η συνάθροισή τους κατά *MAX* δίνει...
 - ❑ $D_2' = \{ (0+0.2)/0, (0.1+0.16)/2, (0.25+0.1)/5, (0.4+0.04)/8, (0.5+0)/10 \} = \{ 0.2/0, 0.26/2, 0.35/5, 0.44/8, 0.5/10 \}$



Βήμα B4: Αποσαφήνιση

❖ Μέθοδος αποσαφήνισης CENDROID

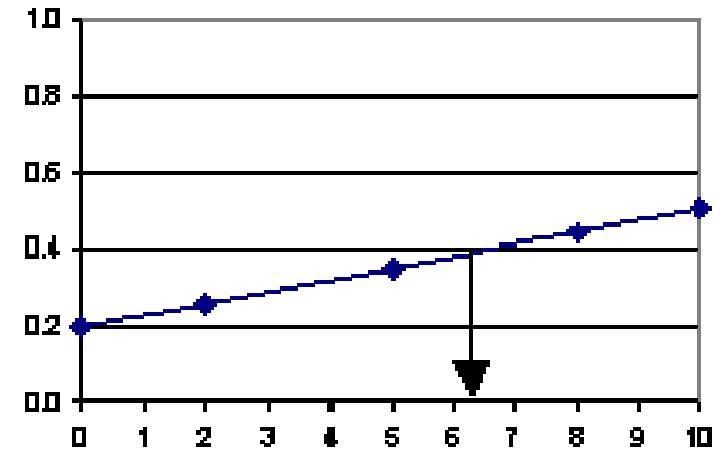
- ❑ Η διακριτή τιμή είναι αυτή που προκύπτει από το κέντρο βάρους της τελικής συνάρτησης συγγένειας για την ασαφή παράμετρο εξόδου.
- ❑ Το κέντρο βάρους επιφάνειας που ορίζεται από μία συνάρτηση $f(t)$: σχέση (1)

$$(1) \quad t_{\kappa\beta} = \frac{\int_{t1}^{t2} t \cdot f(t) dt}{\int_{t2}^{t1} f(t) dt}$$

$$(2) \quad t_{\kappa\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i \cdot u_{OUT}(t_i)}{\sum_{i=1}^N u_{OUT}(t_i)}$$

- ❑ Για διακριτού συνόλου αναφοράς: διακριτό άθροισμα με δειγματοληψία N σημείων (σχ.2).
- ❑ Με CENDROID αποσαφήνιση στα αποτελέσματα της συνάθροισης SUM, προκύπτει:

$$t_{D2'} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i \cdot u_{D2'}(t_i)}{\sum_{i=1}^5 u_{D2'}(t_i)} = \frac{0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.26 + 5 \cdot 0.35 + 8 \cdot 0.44 + 10 \cdot 0.5}{0.2 + 0.26 + 0.35 + 0.44 + 0.5} = 6.2$$



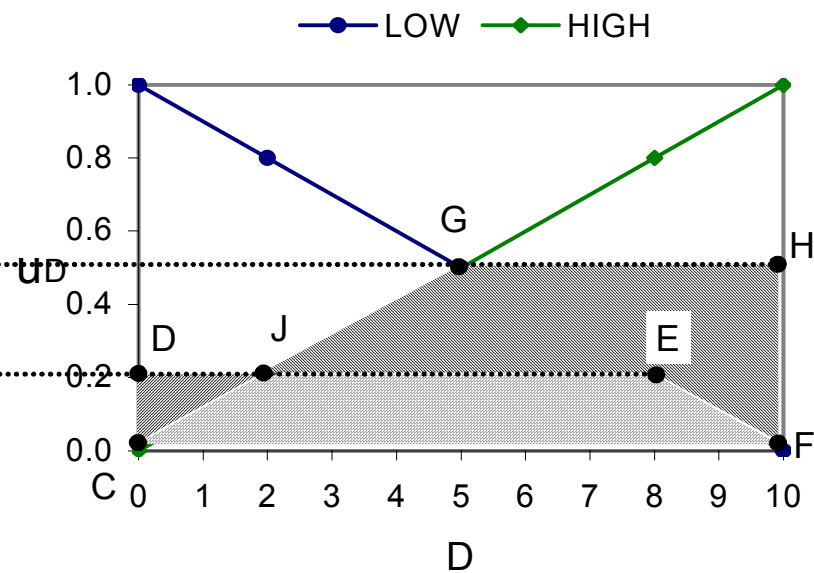
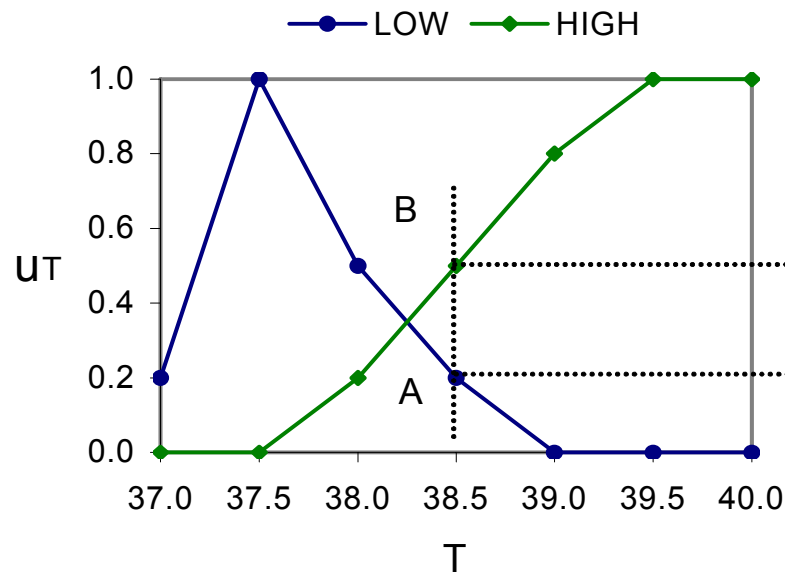
Διαγραμματική Επίλυση (1/2)

- ❑ **Προϋπόθεση:** οι συναρτ. συγγένειας να είναι συνεχείς καμπύλες - όχι ζεύγη $(x, u(x))$
- ❑ **Πρόβλημα:** υπολογισμός της δόσης D' μιας φαρμακευτικής ουσίας με βάση την θερμοκρασία T' και τους ασαφείς κανόνες:

K_1 : if T is HIGH then D is HIGH

K_2 : if T is LOW then D is LOW

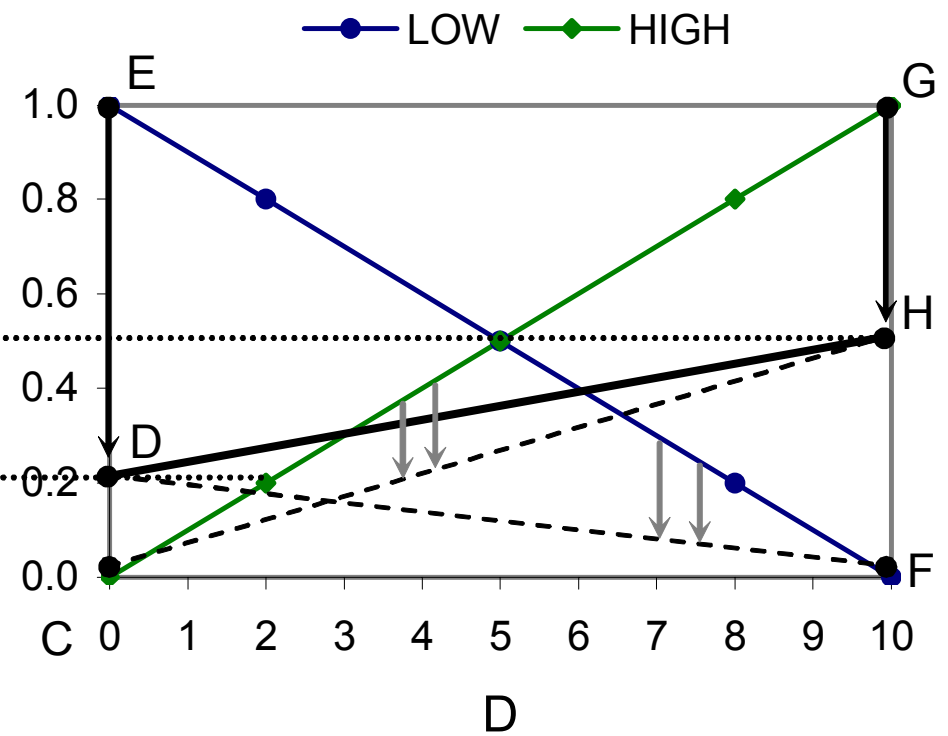
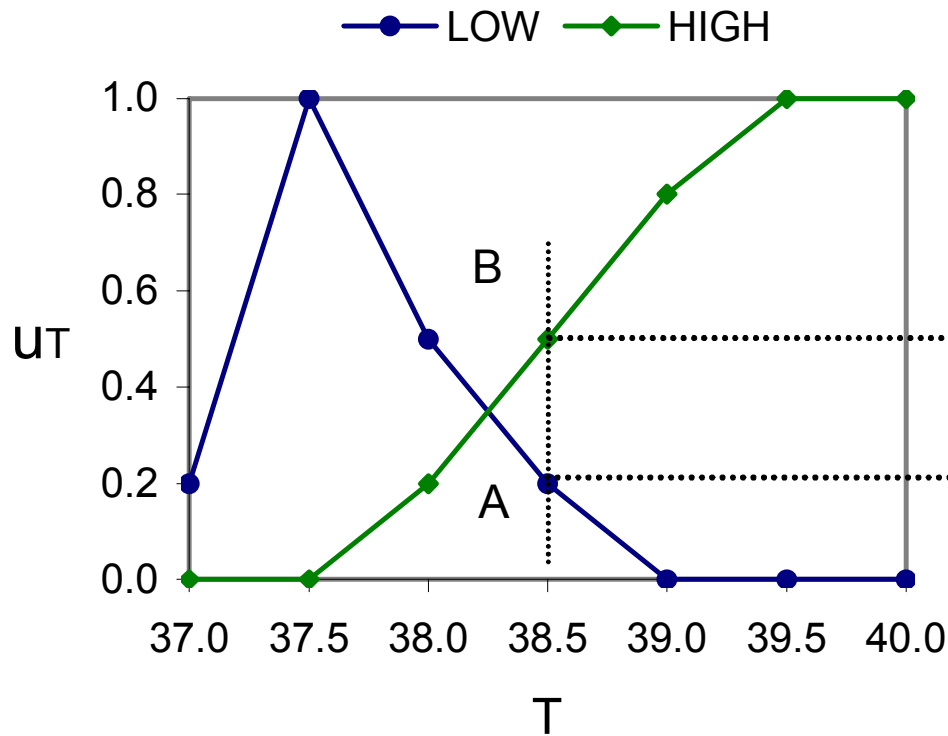
- ❑ με μέθοδο MIN για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συνεπαγωγής:



- ❑ κανόνας K_2 : DEF
- ❑ κανόνας K_1 : CGH
- ❑ Λύση: αποσαφήνιση στην "καμπύλη" DJGH

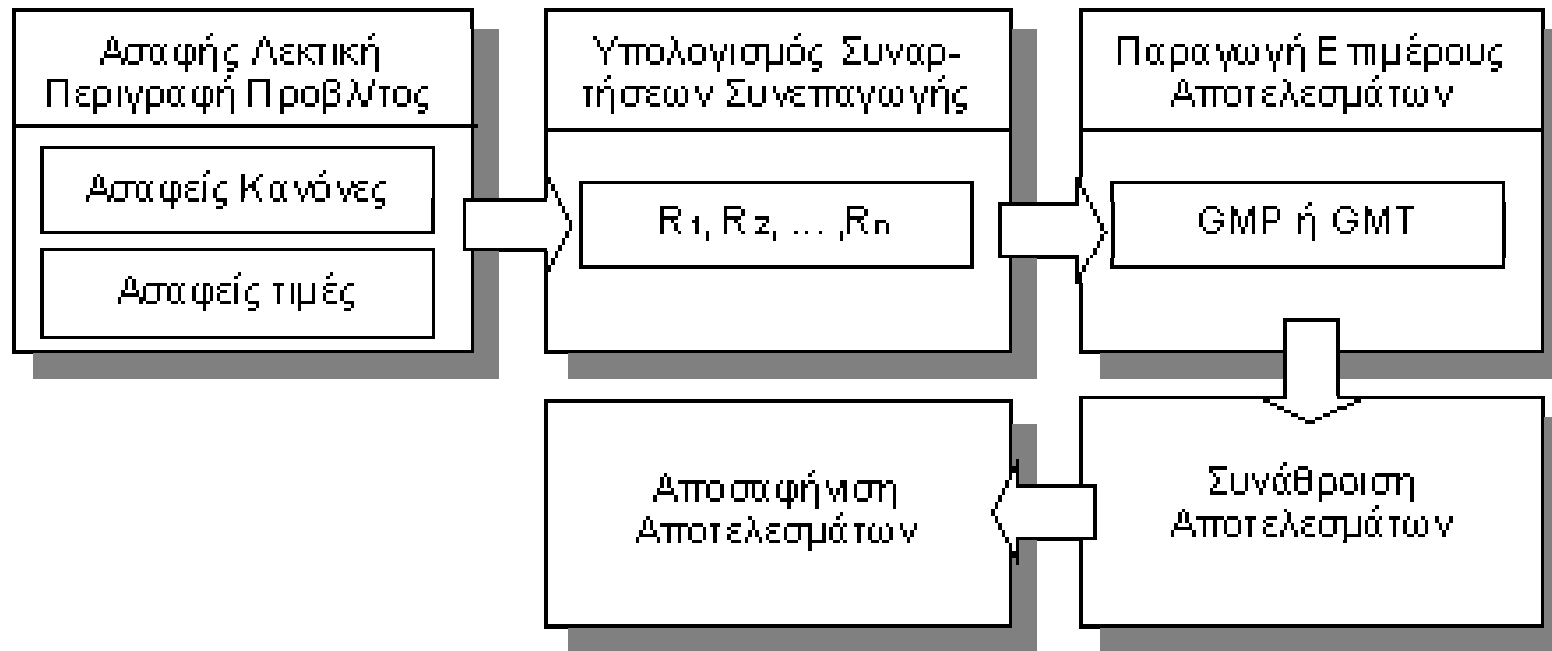
Διαγραμματική Επίλυση (2/2)

- Θεωρώντας μέθοδο PRODUCT για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συνεπαγωγής:



- κανόνας K_2 : DF
- κανόνας K_1 : CH
- Λύση: αποσαφήνιση στην "καμπύλη" DH

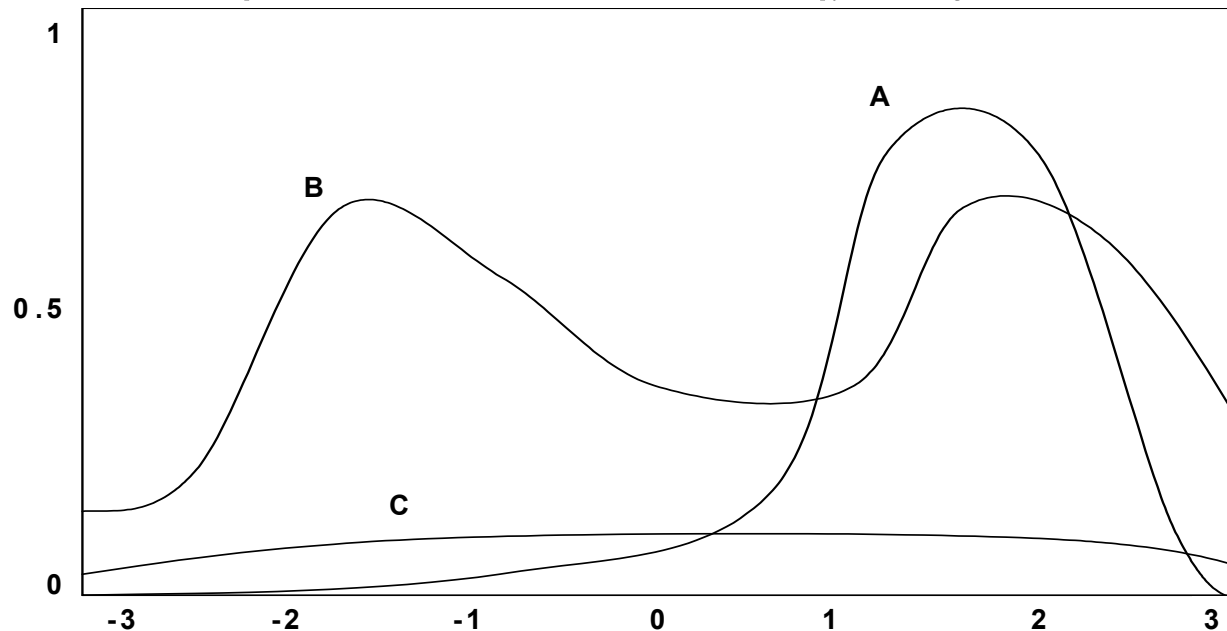
Συστήματα Ασαφούς Συλλογιστικής



- ❖ **Δυσκολότερο σημείο:** επιλογή ασαφών μεταβλητών, των τιμών τους και των κανόνων με τους οποίους θα συνδυαστούν.
- ❖ Συναρτήσεις συγγένειας: χρήση νευρωνικών δικτύων.
- ❖ σημεία προσοχής: επιλογή τελεστή συνεπαγωγής, μεθόδου αποσαφήνισης.

Σταθερότητα/Ποιότητα Ασαφούς Συστήματος

- ❖ **Σταθερότητα:** η ικανότητα να εμφανίζει καλή συμπεριφορά σε όλο το φάσμα τιμών εισόδου.
- ❖ Η μορφή του τελικού αποτελέσματος πολλές φορές δίνει μία καλή ένδειξη για την ποιότητα του συνολικού συστήματος.



Χαρακτηριστικές περιπτώσεις ασαφούς εξόδου.

Παράδειγμα

- ύπαρξη ενός "ισχυρού" κανόνα (επιθυμητό χαρακτηριστικό).
- δύο κορυφές: αντιφατική συμπεριφορά (απαιτείται βελτίωση του συστήματος κανόνων).
- μεγάλο πλατό: το σύστημα των κανόνων είναι ελλιπές.

Εφαρμογές Ασαφούς Λογικής

- ❖ Σύστημα Linkman (ιστορικά η πρώτη εφαρμογή): βιομηχανίες τσιμέντου.
- ❖ Υπόγειος σιδηρόδρομος Sendai στην Ιαπωνία.
- ❖ Φωτογραφικές μηχανές.
- ❖ Πλυντήρια ρούχων.
- ❖ Συσκευές video-camera.
- ❖ Συστήματα πέδησης (fuzzy ABS).
- ❖ Συστήματα ελέγχου λαβής σε ρομποτικούς βραχίονες.
- ❖ Συσκευές κλιματισμού.
- ❖ Βαλβίδες για έλεγχο ροής.
- ❖ Κατανομή καυσίμου ανάλογα με το φάκελο πτήσης σε δεξαμενές πολεμικών αεροσκαφών.
- ❖ Έμπειρα συστήματα με ασαφείς κανόνες.